Aufg. 23

Beh.: $\mathbb{CP}^1 \cong S^2$

Bew.: Es ist $\mathbb{CP}^1 := \mathbb{C}^2\setminus\{0\}/\mathbb{C}^*$ nach Definition.

Hierbei operiert $\mathbb{C}^*$ auf $\mathbb{C}^2\setminus\{0\}$ durch Skalarmultiplikation.

Es ist $\mathbb{C}^* \cong \mathbb{R}_{>0} \times S^1$ (Darstellung einer komplexen Zahl durch Betrag & Winkel)

$$z \mapsto \left(|z|, \frac{z}{|z|}\right)$$

Man kann den Quotienten, der $\mathbb{CP}^1$ definiert in zwei Schritte aufteilen:

$$\mathbb{C}^2\setminus\{0\}/\mathbb{C}^* \cong \left(\mathbb{C}^2\setminus\{0\}/\mathbb{R}_{>0}\right)/S^1$$

$$\cong S^3/S^1$$

Hierbei kommt der zweite Homöomorphismus vom Homöomorphismus

$$\begin{array}{ccccc} S^3 & \xhookrightarrow[\text{Inklusion}]{} & \mathbb{C}^2\setminus\{0\} & \xrightarrow[\text{Quotientabb.}]{} & \mathbb{C}^2\setminus\{0\}/\mathbb{R}_{>0} \\ z & \longmapsto & z & \longmapsto & [z] = \text{Äqu.-klasse von } z \text{ im Quotienten.} \end{array}$$

(Komposition offensichtlich stetiger Abb.)

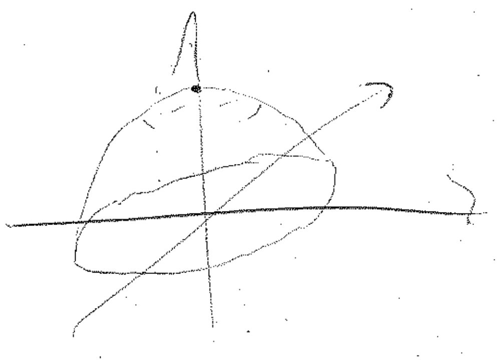
mit Umkehrabb. $\bar{f}$ gegeben durch die univ. Eigenschaft der Quotienten:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^2\setminus\{0\} \arrow[r, "f"] \arrow[d] & S^3 \\ \mathbb{C}^2\setminus\{0\}/\mathbb{R}_{>0} \arrow[ur, dashed, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd} \qquad z \longmapsto \frac{z}{|z|}$$

($\bar{f}$ existiert, da $f(r \cdot z) = f(z)$ $\forall r \in \mathbb{R}_{>0}$)

Weiterhin ist

$$S^3/S^1 \cong \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \left\|\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right\| = 1,\ z \geq 0 \right\}}_{H := \text{obere Halbkugel der Sphäre im } \mathbb{R}^3} \Big/ \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \left\|\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}\right\| = 1 \right\}}_{\partial H := \text{Rand der Halbkugel}}$$



Um dies zu sehen, identifizieren wir

$$S^3 \cong \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \;\middle|\; \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| = 1 \right\}$$

Darin haben wir den Teilraum

$$\cup\!|$$

$$S^3_+ := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \;\middle|\; \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| = 1 ,\; y \neq 0 \right\}$$

Die S^1-Operation schränkt sich ein auf S^3_+: $y \neq 0 \Rightarrow t \cdot y \neq 0 \;\; \forall t \in S^1$

$$\Uparrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in S^3_+ \qquad \begin{pmatrix} tx \\ ty \end{pmatrix} \in S^3_+ \;\; \forall t \in S^1$$

(*) S^3_+/S^1 ist in Bijektion zur offenen oberen Halbkugel:
Für $\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right] \in S^3_+/S^1$ gibt es einen eindeutigen Repräsentanten $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ mit $y \in \mathbb{R}_{>0}$: Diesen erhält man, indem man mit $\frac{|y|}{y} \in S^1$ multipliziert:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \frac{|y|}{y} = \begin{pmatrix} x \frac{|y|}{y} \\ |y| \end{pmatrix}.$$

(**) Für $y = 0$ gilt: $\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| = 1 \Rightarrow x \in S^1$, also repräsentieren alle solchen $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ den gleichen Pkt in S^3/S^1

Betrachte Abb.

$$\begin{tikzcd} S^3 \arrow[r, "g"] \arrow[d] & H/\partial H \\ S^3/S^1 \arrow[ur, dashed, "\bar{g}"'] & \end{tikzcd}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{cases} \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\left(\frac{x|y|}{y}\right) \\ \mathrm{Im}\left(\frac{x|y|}{y}\right) \\ |y| \end{pmatrix} & \text{wenn } y \neq 0 \\ [\partial H] & \text{wenn } y = 0 \end{cases}$$

Offensichtlich ist $g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = g\begin{pmatrix} tx \\ ty \end{pmatrix}$ $\forall t \in S^1$, faktorisiert also durch ein $\bar{g}$:

Diese ist stetig (direkt Urbilder offener Mengen prüfen: Fallunterscheidung $[\partial H] \in U$, $[\partial H] \notin U$)

bijektiv (siehe (*) und (**))

von einem kompakten Raum (Bild des kompakten Raums S^3)

in einen Hausdorffraum (H ist Hausdorff; jeden Pkt auf ∂H kann man durch die Umgebung $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in H \;\middle|\; 0 \leq z \leq \frac{c}{2} \right\}$ von einem Pkt $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ trennen)

Dass $H/\partial H$ homöomorph zu S^2 ist lasse ich als Übung (anschaulich sollte es klar sein)

---

sorry, ist nur skizziert – keine Zeit gehabt...